Exercices sur les complexes

Exercice 1 :

Le plan est rapporté au repère $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad ; \quad z_c = 2.$$

1 *a.* Vérifier que

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.

2 *a.* Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient

$$2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0$$

est un cercle de centre Ω d'affixe -2.
Préciser son rayon.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

Exercice 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, unité graphique 4 cm.
Soit f la fonction qui, à tout nombre complexe z différent de $-2\mathrm{i}$, associe :

$$Z = f(z) = \frac{z - 2 + \mathrm{i}}{z + 2\mathrm{i}}.$$

On appelle A et B les point d'affixes respectives $z_A = 2 - \mathrm{i}$ et $z_B = -2\mathrm{i}$.

1 Si $z = x + \mathrm{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction x et y. En déduire la nature de :

a. l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un réel ;

b. l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul ;

c. l'ensemble G des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

2 Déterminer les ensembles E, F et G sans utiliser les parties réelle et imaginaire de Z.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$. L'unité graphique est 4 cm.
Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1.
On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} \end{cases}$$

On note M_n le point d'affixe z_n.

1. Calcul de z_n en fonction de n et de λ.
   a. Vérifier les égalités: $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda + 1)\mathrm{i}$; $z_3 = \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)\mathrm{i}$.

   b. Démontrer que, pour tout entier n positif ou nul on a $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

2. Étude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.
   a. Montrer que $z_4 = 0$.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.

   c. Représenter les points M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Exercice 4 :

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.

2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. Etant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

Variables :	u est un réel
	p est un réel
	n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	
Sortie :	

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.
En déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$.