Corrigés des exercices sur les complexes

Exercice 1 :

1 *a.*
$$\begin{aligned}\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} &= \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3} - 2}{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} - 2} \\ &= \frac{-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}} \\ &= \frac{\left(-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2}{\left(-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(-3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)} \\ &= \frac{6 + 6\mathrm{i}\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$$

b. De la question précédente, on déduit que $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Or, $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)$. Donc, $\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

De plus, $z_A = \overline{z_B}$, ce qui signifie que A et B sont symétriques par rapport à $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u})$, et C se trouve sur $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u})$ donc CA = CB. Le triangle ABC est donc isocèle en C. Et comme l'angle au sommet principal est égal à $\frac{\pi}{3}$, on en déduit que ABC est équilatéral.

c. Si z représente l'affixe de ce centre :

$$\begin{aligned}z &= \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, O est le centre du cercle circonscrit à ABC.
Le rayon de Γ_1 est donc OC, soit 2.

2 *a.* Posons $z = x + \mathrm{i}y$. Alors,

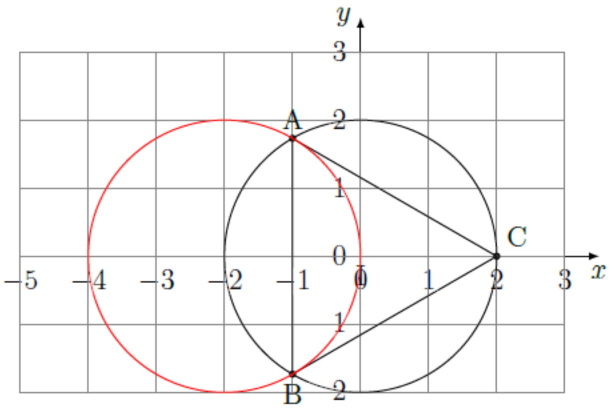
$$\begin{aligned}2\left(z + \overline{z}\right) + z\overline{z} = 0 &\Leftrightarrow 2(x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y) + (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x + x^2 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 - 4 + (y-0)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-0)^2 = 2^2\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ vérifiant l'équation est le cercle de centre $\Omega\,(-2\,;0)$ et de rayon $r = 2$.

b. On remplace z par z_A dans l'expression $2(z + \overline{z}) + z\overline{z}$:

$$\begin{aligned}2(z_A + \overline{z_A}) + z_A\overline{z_A} &= 4\Re(z_A) + |z_A|^2 \\ &= -4 + ((-1)^2 + \sqrt{3}^2 \\ &= -4 + 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

z_A satisfait l'équation donc $\mathrm{A} \in \Gamma_2$.
Comme $z_B = \overline{z_A}$ et que l'équation est symétrique en z et $\overline{z}$, $\mathrm{B} \in \Gamma_2$.



Exercice 2 :

1 $Z = \dfrac{[x-2+\mathrm{i}(y+1)](x-(y+2)\mathrm{i})}{(x+(y+2)\mathrm{i})(x-(y+2)\mathrm{i})}$

$= \dfrac{x(x-2)+(y+1)(y+2)+\mathrm{i}[x(y+1)-(x-2)(y+2)]}{x^2-(y-2)^2}$

Donc $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2-(y-2)^2}$ et $\Im(Z) = \dfrac{-x+2y+4}{x^2-(y-2)^2}$.

a. $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(Z) = 0 \Rightarrow -x+2y+4 = 0$.
Ainsi, E est la droite d'équation cartésienne $-x+2y+4=0$.

b. $Z = k\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \Re(Z) = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.
F est donc le cercle de centre d'affixe $1-\frac{3}{2}\mathrm{i}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c. $|Z| = 1 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$.
G est donc la médiatrice de [AB].

2 *a.* $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right)$. $Z \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(Z) = 0 \mod \pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \mod \pi$.
Donc, A, B et M sont alignés. E est donc la droite (AB).

b. $Z = k\mathrm{i},\ k \in \mathbb{R} \Rightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} \mod \pi \Rightarrow \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
Ainsi, BAM est un triangle rectangle en M. Donc F est le cercle de diamètre [AB].

c. $|Z| = 1 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$.
G est donc la médiatrice de [AB].

3 $Z-1 = \dfrac{z-2+\mathrm{i}-z-2\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}} = \dfrac{-2-\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}$ donc $|Z-1| \times |z+2\mathrm{i}| = |-2-\mathrm{i}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
Si $M \in \mathscr{C}_{(B,\sqrt{5})}$, alors $z = z_B + \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et donc $|z+2\mathrm{i}| = |\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = \sqrt{5}$.
Ainsi, $|Z-1| = 1$. Donc M' sera sur le cercle de centre d'affixe 1 et de rayon 1.

Exercice 3 :

1. **a.** $z_0 = 0$.
$z_1 = \lambda \times 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$.
$z_2 = \lambda \times \mathrm{i} + \mathrm{i} = (\lambda + 1)\mathrm{i}$.
$z_3 = \lambda \times (\lambda + 1)\mathrm{i} + \mathrm{i} = (\lambda(\lambda + 1) + 1)\,\mathrm{i} = \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)\mathrm{i}$.

b. Démontrons ce résultat par récurrence.
Initialisation : Si $n = 1$ alors $z_1 = \mathrm{i}$
$\dfrac{\lambda^1 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} = \mathrm{i} = z_1$.
La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang $n > 0$: $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.
Montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que $z_{n+1} = \dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= \lambda z_n + \mathrm{i} \\
&= \frac{\lambda\left(\lambda^n - 1\right)}{\lambda - 1}\mathrm{i} + \mathrm{i} \\
&= \frac{\left(\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1\right)\mathrm{i}}{\lambda - 1} \\
&= \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 1 et est héréditaire.
Par conséquent, pour tout entier naturel n non nul on a $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$.

2. **a.** Si $\lambda = \mathrm{i}$
Alors $z_3 = (-1 + \mathrm{i} + 1)\mathrm{i} = -1$ donc $z_4 = \mathrm{i} \times (-1) + \mathrm{i} = 0$.

b. On a $z_4 = z_0 = 0$
Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
z_{n+4} &= \frac{\lambda^{n+4} - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} \\
&= \frac{\lambda^n \times \lambda^4 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} \\
&= \frac{\lambda^n \times 1 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i} \text{ car } \mathrm{i}^4 = 1 \\
&= z_n
\end{aligned}$$

Donc, pour tout entier naturel, on a $z_{n+4} = z_n$.

Exercice 4 :

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+\mathrm{i})z_n$$

Partie A

Pour tout entier naturel n on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.

$u_0 = |z_0| = |\sqrt{3} - \mathrm{i}| = \sqrt{3+1} = \boxed{2}$

2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = |z_{n+1}| &= |(1+\mathrm{i})z_n| \\ &= |1+\mathrm{i}|\;|z_n| \\ &= \sqrt{2}u_n \end{aligned}$$

Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et son premier terme est $u_0 = 2$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

On a directement $\boxed{u_n = 2\left(\sqrt{2}\right)^n}$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Comme $\sqrt{2} > 1$ et $2 > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \boxed{+\infty}$.

5.

Variables :	u est un réel
	p est un réel
	n est un entier
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 2
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Tant que $u \leqslant p$ faire
	u reçoit $\sqrt{2}u$
	n reçoit $n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+\mathrm{i})z_0 \\ &= (1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i}) \\ &= \sqrt{3}-\mathrm{i}+\mathrm{i}\sqrt{3}+1 \\ &= \left(\sqrt{3}+1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{i} \end{aligned}$$

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+\mathrm{i}$.

En déduire la forme exponentielle de z_1.

On a déjà vu que $|z_0| = 2$.

$$z_0 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$$

Un argument θ de z_0 est tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

On peut prendre, par exemple, $\theta = \dfrac{-\pi}{6}$ et $z_0 = \boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

<u>Forme exponentielle de</u> $1+\mathrm{i}$

$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$

$$1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$$

Enfin pour terminer :

$$z_1 = (1+\mathrm{i})z_0 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \times 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \boxed{2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$$

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

En prenant la partie réelle de z_1, exprimée d'un part sous forme algébrique (question 1) et d'autre part sous forme trigonométrique (question 2),

$\sqrt{3}+1 = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12}$ donc $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{4}}$